力学総論演習問題

III. 様々な運動

問題１.

初期条件 $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$ のもとで，微分方程式 $\ddot{x}=f\cos\omega t$ $(\omega>0)$ を解け.

(解： $x(t)=x0+\dfrac{f}{\omega^2}+v_0 t-\dfrac{f}{\omega_2}\cos\omega t$)

問題２.

速度に比例する空気抵抗 $-kv$ $(k>0)$が働く場合の落下運動について考える.

(1) 速度 $v(t)$に対する微分方程式として運動方程式を示せ.

(2) 初期条件 $v(0)=v_0$ として運動方程式を解け.

(3) 終端速度を v_F とする．$v_0<v_F$, $v_0>v_F$ の場合について v-t 図の概形を示せ.

問題 3.

次の微分方程式の一般解 $f(x)$を求め，さらに，$f(x_0)=f_0$ を満たすような特殊解を求めよ.

(i) $\dfrac{df}{dx}=-f\cdot x$; (ii) $\dfrac{df}{dx}=-f^2\cdot x$; (iii) $\dfrac{df}{dx}=-f(1-f)\cdot x$ (部分分数展開を用いる．)

問題 4.

速度の 2 乗に比例する空気抵抗－kv^2 が働く場合の落下運動について考える.

(1)終端速度 v_F を求めよ.

(2)初期条件 $v(0)=0$ のもとで運動方程式を解き，$v(t)$を求めよ.

(ヒント：線形方程式ではない．部分分数展開を用いる．)

IV. 振動現象

問題 5.

a,b を定数として，$x(t)$に対する微分方程式：$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ を考える.

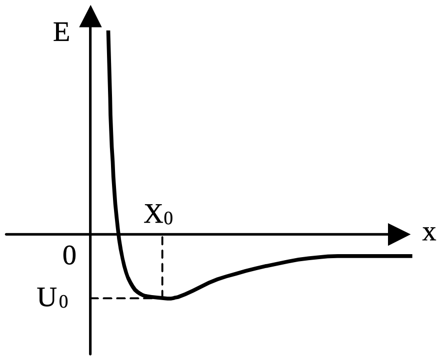
(1) $a^2>4b$ の場合に，線形独立な解 $x_1(t)$, $x_2(t)$を求めよ.

(2) (1)において，x_1, x_2 の任意の線形結合 $x=c_1x_1+c_2x_2$ (c_1, c_2 は任意定数)が微分方程式を満足することを示せ.

(3) $a^2=4b$ の場合，$x=e^{\lambda t}$ が解であるならば，$x=te^{\lambda t}$ も解となることを示せ.

V. 力学的エネルギー保存則とその応用.

問題 6. 下図のようなポテンシャル, $U(x)=\dfrac{\alpha}{x^2}-\dfrac{\beta}{x}\ (\alpha,\beta>0)$ のもとでの質点の運動を調べる. ただし, $x>0$ の領域について考える.



(1) ポテンシャルの安定点 x_0 と安定値 U_0 を求めよ.

(2) 力学的エネルギー E が与えられたときの運動の範囲を求めよ.

(3) 安定点近傍で質点が単振動を行う場合の周期を求めよ.

(4) $E<0$ のときの運動の範囲を $x_1\le x\le x_2$ とする. 関係式: $E-U(x)=-E\dfrac{(x-x_1)(x_2-x)}{x^2}$ が成り立つことを示せ. (解と係数の関係を用いる. あるいは $E=U(x_1)=U(x_2)$ に注意する.)

(5) $U_0<E<0$ の場合の運動の周期 $T(E)$ を求めよ. 公式: $\displaystyle\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\frac{a+b}{2}\pi \quad (a<b)$ を用いること.

問題 7. ポテンシャル, $U(x)=\alpha x^4-2\beta x^2\ (\alpha,\beta>0)$ のもとでの質点の運動を調べる.

(1) ポテンシャルの安定点 x_0 と安定値 U_0 を求め, $U(x)$ の概形を調べよ.

(2) 安定点近傍で質点が単振動を行う場合の周期を求めよ.

(3) 力学的エネルギー E が与えられたときの運動の範囲を求めよ.