

「力学総論」試験問題

(2001.9.11, 担当：魚住)

問題 1. 摩擦のある水平面上で、ある物体を x 軸に沿って滑らせる．以下の場合において、(i) 時刻 t における物体の速度 $v(t)$ 、(ii) 物体が静止する時刻 t_1 、(iii) 物体が静止する位置 x_1 を求めよ．ただし、物体の質量を m 、重力加速度を g 、動摩擦係数を μ' とし、初期条件は $x(0) = 0$ 、 $v(0) = v_0$ とする．(配点 40)

- (1) 空気抵抗が働かない場合．
- (2) 速度に比例する空気抵抗 $-kv$ が働く場合．

問題 2. ポテンシャル $U(x) = \alpha/x^2 - 2\beta/x$ のもとでの質点の運動について考える．ただし、 α, β は正の定数であり、ここでは $x > 0$ の領域での運動を扱う．また、質点の質量は m とする．(配点 30)

- (1) ポテンシャルの安定点 x_0 と安定値 U_0 を求め、 $U(x)$ の概形を示せ．
- (2) 質点が x_0 の近傍で微小振動する場合の振動の周期 T_0 を求めよ．
- (3) 質点の力学的エネルギー E が $U_0 < E < 0$ を満たす場合、運動の範囲は $x_1 \leq x \leq x_2$ のように限られる． x_1 と x_2 を E を用いて表せ．
- (4) (3) において、関係式 $E - U(x) = |E|(x - x_1)(x_2 - x)/x^2$ が成り立つことを示せ．

- (5) (3) の場合、質点の運動は周期的である．積分公式：
$$\int_a^b \frac{xdx}{(x-a)(b-x)} =$$

$\frac{a+b}{2}\pi$ ($a < b$) を用いて、運動の周期 $T(E)$ を求めよ．($\lim_{E \rightarrow U_0} T(E) = T_0$ となるか確かめよう．)

問題 3. 中心力場のもとでの質点の運動について考える．力の中心を原点 O にとり、質点の位置を r 、運動量を p で表す．(配点 30)

- (1) 原点に対する質点の角運動量 L を r, p を用いて表せ．
- (2) 運動方程式を用いて L が保存量であること、すなわち $dL/dt = 0$ が成り立つことを示せ．
- (3) 質点の運動は O を含むある平面内に限られることを示し、この平面と L の関係を述べよ．
- (4) (3) の平面内に平面極座標 (r, θ) を設定して質点の運動を記述する．質点の質量を m として、質点の角運動量の大きさ L と運動エネルギー K を (r, θ) を用いて表せ．