平成２６年度

大阪府立大学大学院

工学研究科電子・数物系専攻

博士前期課程入学試験

試験科目群４

数理工学基礎

(線形代数、微積分、力学、電磁気学)

試験問題

（解答時間 180 分）

注意

（１）受験番号、氏名を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（２）線形代数、微積分、力学、電磁気学の４科目から２科目を選択し、それぞれ解答用紙に解答せよ。

（３）選択した科目名を解答用紙の科目名欄に記入せよ。

（４）試験終了後、問題冊子は持ち帰ってよい。

線形代数　問題

1．4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ {}^t(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b=0 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ {}^t(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c=0,\ a=d \right\}$$

とする．W_1, W_2 の次元と一組の基底をそれぞれ求めよ．また，部分空間 $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ の次元と一組の基底をそれぞれ求めよ．ここで，

$$W_1 + W_2 = \{ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x} \in W_1,\ \boldsymbol{y} \in W_2 \}$$

である．

2．行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を直交行列を用いて対角化せよ．

3．$n \times p$ 行列 X の階数を p, $n \times q$ 行列 Z の階数を q とし，$n \times (p+q)$ 行列 (X, Z) の階数を $p+q$ とする．また，

$$R = E_n - X({}^tXX)^{-1}({}^tX)$$

とする．ここで，E_n は n 次の単位行列である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ${}^tR = R$, $R^2 = R$ であることを示せ．

(2) R の固有値は 0 か 1 であることを示せ．

(3) R の階数は $n-p$ であることを示せ．

(4) $\boldsymbol{c}$ を q 次元列ベクトルとするとき，${}^tZRZ\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であることを示すことにより，${}^tZRZ$ は正則であることを示せ．

微積分　問題

1．極形式で表示された以下の曲線の概形を描き，さらにその曲線の長さを求めよ．なお，極形式 $r = f(\theta)$ は，$x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ により，$\mathbb{R}^2$ における θ で媒介変数表示された曲線と見なすことができる．

(1)　$r = 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$

(2)　$r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$

2．三次元空間での立体 V を

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \leq 1 \right\}$$

とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) A を三次正方行列とする．一次変換 $f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ により V は，原点を中心とする半径 1 の球に変換されるとする．このとき，行列 A を求めよ．

(2) 三重積分

$$\iiint_V |x|^2 \, dxdydz$$

を計算せよ．

3．関数 $f(x)$ が，閉区間 $[-1, 1]$ でリプシッツ連続であるとは，ある正の数 L が存在して，任意の $x, y \in [-1, 1]$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

が成立することである．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = |x|$ は閉区間 $[-1, 1]$ でリプシッツ連続であることを示せ．

(2) 関数 $g(x)$ は閉区間 $[-1, 1]$ で連続，開区間 $(-1, 1)$ で連続微分可能であるとする．このとき，ある正の数 M が存在して，

$$\sup_{x \in (-1,1)} |g'(x)| \leq M$$

が成り立つならば，$g(x)$ は閉区間 $[-1, 1]$ でリプシッツ連続であることを示せ．

(3) n は自然数とする．

$$h(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義される関数 $h(x)$ は閉区間 $[-1, 1]$ でリプシッツ連続であるか，リプシッツ連続でないかを理由（証明）をつけて述べよ．

力学　問題

問題は次ページ分も含め全３題である。

［1］x 軸上で運動する質量 m の質点があり、ポテンシャル $U(x)=k_n x^{2n}$ を持つ力がこの質点に作用するものとする。ここで、n は負でない整数であり、k_n は正の定数である。初期条件を $x=a\ (>0),\ \dot{x}=0$ として、以下の問いに答えよ。

（1）時間を t として、質点の運動方程式を書き下せ。

（2）この質点が振動するために n の満たすべき条件を求めよ。

以下では（2）の条件が満たされているものとして答えよ。

（3）質点の座標が x のときの質点の速さを求めよ。

（4）振動の周期 T を積分を用いて表せ。

（5）振動の周期 T が振幅に依存しない（等時性）のは $n=1$ の場合に限られることを示せ。

［2］真空中に原点 O を中心とする半径 R の球と質量 m の質点がある。この質点が球の外側にあるとき、ポテンシャル $U(r)$ を持つ力（斥力）が質点に作用する。ここで、r は原点から質点までの距離である。いま、この質点が無限遠方から x 軸に平行に速さ v_0 で入射するとしよう（図 1 参照）。このときの質点と x 軸の距離を b とし、ポテンシャル U は無限遠では 0 になるものとして、以下の問いに答えよ。なお、入射時の質点の運動エネルギーは球の表面でのポテンシャル $U(R)$ よりも大きいものとする。

（1）入射時の質点の角運動量の大きさを求めよ。

（2）球に衝突しない限り、質点の角運動量は一定に保たれる。この理由を説明せよ。

（3）質点の軌道が 1 点で球に接するとき、接点での質点の速さを求めよ。

（4）質点が球と衝突するために b が満たすべき条件を求めよ。

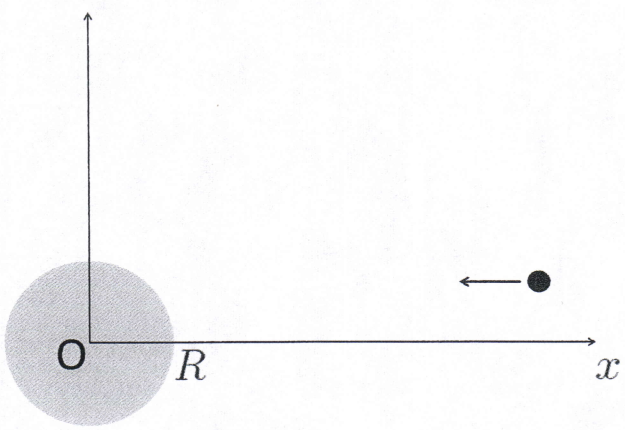


図 1

（次ページへ続く）

［3］質量 M、半径 a の一様で薄い円板（剛体）がある。空気抵抗は無視し、重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。

（1）この円板の中心Oを通り、円板に垂直な軸のまわりの慣性モーメント I_1 を求めよ。

（2）この円板の中心Oを通り、円板に平行な軸のまわりの慣性モーメント I_2 を求めよ。

この円板に水平な固定軸を通し、そのまわりに自由に回転できるようにする。この軸は円板に平行で中心Oからの距離は h とする。中心Oからこの軸に引いた垂線の足をFとする（図２参照）。

（3）この固定軸のまわりの円板の慣性モーメント I を求めよ。

（4）FO が鉛直下向きの直線となす角を θ として、円板の運動方程式をたてよ。

（5）円板の $\theta = 0$ を中心とする微小振動の周期を求めよ。

（6）円板を $\theta = \frac{\pi}{2}$ の位置で静かにはなすとき、その後の角速度の大きさ $|\dot{\theta}|$ を θ を用いて表せ。

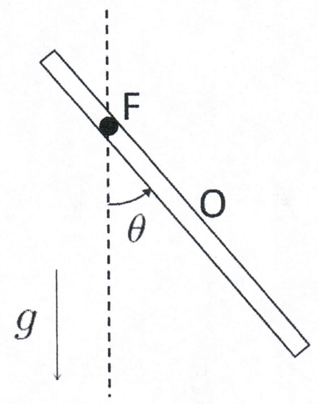


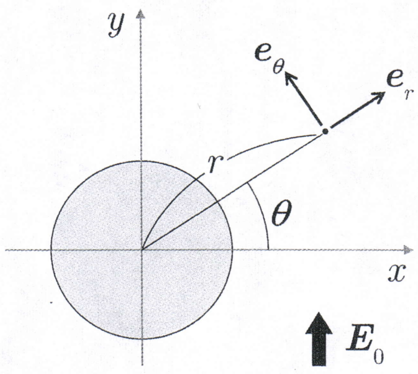
図２　水平軸方向から見た図

電磁気学　問題

※２ページにわたって問題は全部で３題ある．

問題 1.

真空中に一様な静電場 $\boldsymbol{E}_0$ がかけられているとする．無限に長い円柱型の導体を中心軸が $\boldsymbol{E}_0$ と垂直になるようにおいた場合に生じる静電場 $\boldsymbol{E}$ について考えよう．円柱の半径は a であり，導体は帯電していないものとする．真空の誘電率を ϵ_0 として以下の問いに答えよ．



(1) 導体表面上で $\boldsymbol{E}$ は導体表面に垂直である．その理由を述べ，導体まわりの $\boldsymbol{E}$ の様子を図に示せ．

(2) $\boldsymbol{E}_0$ を y 方向として円柱に垂直になるよう xy 座標系を設定し，図のように平面極座標 (r, θ) をとる．導体から十分離れたところ $(r \gg a)$ では $\boldsymbol{E} \sim \boldsymbol{E}_0$ であることを考慮して，$r \gg a$ における静電ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ を E_0 $(= |\boldsymbol{E}_0|)$, r, θ を用いて表せ．ポテンシャルの基準は自由にとってよい．

(3) ラプラシアン $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ は，r, θ を用いて次のように表されることを示せ．

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

(4) 導体外 $(r > a)$ で $\phi(r, \theta)$ はラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を満たし，その一般解は，

$$\phi(r, \theta) = (a_0 + b_0\theta)(c_0 \log r + d_0) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)(c_n r^n + d_n \frac{1}{r^n})$$

の形で与えられる．対称性に注意しつつ，境界条件を満足するように係数 a_n, b_n, c_n, d_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をとることにより，導体外の静電ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ を定めよ．ただし，導体の電位は ϕ_0 とせよ．

(5) 導体外での電場を $\boldsymbol{E} = E_r(r, \theta)\boldsymbol{e}_r + E_\theta(r, \theta)\boldsymbol{e}_\theta$ と表す．E_r，E_θ を求めよ．ここで $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ は，図に示すように，動径方向とそれに垂直な方向を向く単位ベクトルである．

(6) 導体表面に現れる誘導電荷の密度 $\sigma(\theta)$ を求めよ．

(「電磁気学　問題」次ページに続く)

問題 2.

半径 a の導体球に電荷 $Q\ (>0)$ を与え，中心 O を通る軸まわりに導体球を一定の角速度 ω で回転させる．電荷は導体球表面に一様に分布するものとして以下の問いに答えよ．いたる所で透磁率は μ とせよ．

(1) 導体球内外での磁場の様子を図示せよ．

(2) 半径 r の円電流が，その中心 O$'$ を通って円電流を含む平面に垂直な軸上，O$'$ から距離 z だけ離れた点につくる磁場の大きさを求めよ．ただし，電流の大きさは I とせよ．

(3) (2) の結果を利用し，導体球の中心 O に生じる磁場の大きさを求めよ．

問題 3.

真空における電磁波の伝播について考える．真空の誘電率は ϵ_0，透磁率は μ_0 とせよ．

(1) 真空中でのマクスウェル方程式を示せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ に対して，関係式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$，および $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ である．

(3) (1) および (2) より，電場 $\boldsymbol{E}$ の伝播を記述する波動方程式を導け．また，光速 c を ϵ_0 および μ_0 を用いて表せ．

(4) 波数ベクトルを $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{E}_0$ を定ベクトルとして，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ で表される平面波解を考える．これが (3) を満たすように角振動数 ω を定めよ．

(5) $\boldsymbol{B}_0$ を定ベクトルとして，磁場を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ で表す．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ とともに，(1) のマクスウェル方程式を満たすとき，$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ の方向の関係，および $\boldsymbol{E}_0$ と $\boldsymbol{B}_0$ の大きさの関係について述べよ．

(「電磁気学　問題」ここまで)