平成２７年度

大阪府立大学大学院

工学研究科電子・数物系専攻

博士前期課程入学試験

試験科目群４

数理工学基礎

（線形代数、微積分、力学、電磁気学）

試験問題

（解答時間 180 分）

注意

（１）受験番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（２）線形代数、微積分、力学、電磁気学の４科目から２科目を選択し、それぞれ解答用紙に解答せよ。

（３）選択した科目名を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（４）試験終了後、問題冊子は持ち帰ってよい。

線形代数　問題

1． f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とし，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトル，$\mathbf{0}$ を $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立であるとする．3 つのベクトル

$$a\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \quad \boldsymbol{x}_1 + a\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \quad \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + a\boldsymbol{x}_3$$

で張られるベクトル空間の次元を求めよ．ただし a は実数である．

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が 1 次独立であり，かつ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ ならば，$f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ も 1 次独立であることを示せ．

2． $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を微分可能な実数値関数とする．

$$g(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}$$

とするとき，微分公式

$$g'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

3． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}$$

で与えるとき，以下の問いに答えよ．ただし a, b は実数である．

(1) $a = 5, b = 0$ のとき, 行列 A を対角化する正則行列 P を 1 つ求め, $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(2) 行列 A のジョルダン標準形 J を求めよ．ただし $J = P^{-1}AP$ となる正則行列 P は求めなくてよい．

微積分　問題

1. a, b, c は実数の定数とする．実数 x, y の関数 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ 対して $f_x(\alpha,\beta) = f_y(\alpha,\beta) = 0$ を満たす点 (α,β) を $f(x,y)$ の停留点と呼ぶ．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 原点 $(0,0)$ は $f(x,y)$ の停留点であることを示せ．

(2) $f(0,0)$ が最小値であるための必要十分条件を求めよ．

(3) $f(x,y)$ が停留点 $(0,0)$ で極大でも極小でもないための必要十分条件を求めよ．

2. $\Omega = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とおく．積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 二重積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ に極座標を用いることで，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) の積分に対して $x^2 = u$ とおくことで，積分 $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x+y)}x^{-1/2}\,y^{-1/2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(3) (2) の積分で $x = s(1-t)$, $y = st$ と変換すると，積分 $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x+y)}x^{-1/2}y^{-1/2}dxdy$ はどのような二重積分で表示されるか．

(4) (2) と (3) の結果を用いて，積分 $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{-1/2}\,t^{-1/2}\,dt$ の値を求めよ．

3. n, m を自然数とし，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．なお，上に有界な単調増加数列が極限をもつことは公理として用いてよい．

(1) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに n について単調増加であることを示せ．

(2) 任意の自然数 n に対して，$a_n \leqq b_n < 3$ であることを示せ．

(3) $n > m$ であるとき，次の不等式を示せ．

$$a_n \geqq \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)^{m-1} b_m + \frac{n!}{n^n}(b_n - b_m)$$

(4) (3) で $n \to \infty$ としてから，$m \to \infty$ とすることで，a_n と b_n は同じ値に収束することを示せ．

力学　問題

問題１.

小球を空気中で水平方向に打ち出し、その後落下させる場合を考える。打ち出す方向を x 軸正、鉛直上向きを y 軸正、打ち出す時刻を $t = 0$ とする。小球の質量 m、重力加速度 g、小球の x 軸方向の初速度 $v_x(0) = v_0$、小球は速度 v に比例した空気抵抗（空気抵抗係数 k）を受けるものとし、以下の問いに答えよ。

(1) 小球の速度 v_x、v_y を用いて x 軸方向、y 軸方向それぞれの運動方程式を記せ。

(2) (1)の運動方程式を解き、x 軸方向、y 軸方向それぞれの速度を求めよ。

(3) 小球の落下速度は x 軸方向、y 軸方向ともに一定値に近づくことを示せ。

(4) x 軸方向、y 軸方向の位置 $x(t)$、$y(t)$ を求めよ。

(5) $k \to 0$ の時、(4)で求めた $x(t)$、$y(t)$ はそれぞれ $v_0 t$、$-gt^2/2$ になることを示せ。

問題２.

重力加速度 g を精密測定すると、測定場所・測定時間により変動していることがわかる。

(1) 重力加速度 g が変動する要因を２つ挙げ、その理由を定性的に説明せよ。

(2) 重力加速度 g を精密測定する手法を２つ挙げ、その原理を定量的に説明せよ。なお、説明文中に用いる物理量として使う記号は、重力加速度 g 以外は定義を明記すること。

電磁気学　問題

※２ページにわたって問題は全部で３題ある．

問題 1.

図 1(a) に示すように，真空中の $y=0$ の位置に，接地された広い導体平面板がおかれている．図はこれを x 軸正方向から見たものである．y 軸上，$y=a$ $(a>0)$ の位置に電荷量 Q の点電荷をおいた．真空の誘電率を ϵ_0 として以下の問いに答えよ．

(1) $y>0$ の領域における静電ポテンシャルと電場を求めよ．

(2) 点電荷に働く力を求めよ．

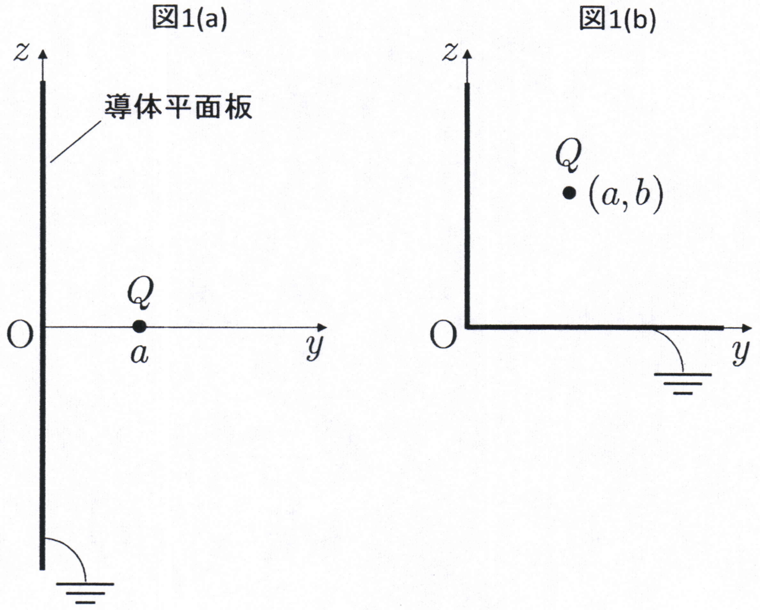
(3) 導体板に誘起される誘導電荷密度を原点 O からの距離 r の関数として表せ．

(4) 導体板に誘起される誘導電荷の総量を求めよ．

次に，図 1(b) に示すように，導体板を「L 字型」になるよう垂直に折り曲げ，折り目が x 軸に沿うように配置して接地する．また，yz 平面上，$y=a,\ z=b$ $(a>0,\ b>0)$ の位置に電荷量 Q の点電荷をおいた．

(5) $y>0,\ z>0$ の領域における静電ポテンシャルを求めよ．

(6) 点電荷に働く力を求めよ．



（「電磁気学　問題」次ページに続く）

問題 2.

半径 a，半径 b $(a < b)$ の十分に長い 2 本の筒型の薄い導体があり，それぞれの中心軸が z 軸と重なるよう真空中に配置されている．それぞれの導体には，大きさ I の定常電流が z 軸に沿う方向で互いに逆向きに流れている．図 2 はこの系を z 軸正方向から見たものであり，電流の分布はそれぞれの導体で一様である．真空および導体の透磁率を μ_0 として以下の問いに答えよ．

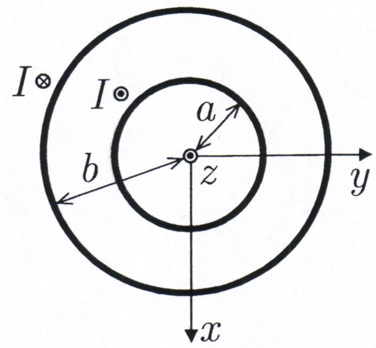
(1) ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の関係を示せ．

(2) 電流密度 $\boldsymbol{j}$ の定常電流に伴う静磁場に対して，ベクトルポテンシャルは，$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ の仮定のもとに，方程式 $\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$ から決められる．マクスウェル方程式からこのことを示せ．ただし，このようにして得られる $\boldsymbol{A}$ が $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を満たすことは示さなくてもよい．

(3) いまの配置では $A_x = 0$, $A_y = 0$ である．中心軸からの距離 r の関数として $A_z(r)$ を定めよ．ただし，ポテンシャルの原点は $r = a$ にとること．

(4) 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ の関数として，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を定めよ．

図2



問題 3.

導体中での不均一な電荷の拡散について考える．

(1) 電場，磁場，電束密度，磁束密度をそれぞれ $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$，電荷密度を ρ，電流密度を $\boldsymbol{j}$ として物質中でのマクスウェル方程式を示せ．

(2) マクスウェル方程式から電荷保存則 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ を導け．

(3) いま，導体の電気伝導率 σ，誘電率 ϵ が定数であり，$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ の関係が成り立つとする．導体中に不均一な電荷分布があると，それは指数関数的に減衰することを説明し，減衰の時定数を求めよ．

（「電磁気学　問題」ここまで）