平成２７年度

大阪府立大学大学院

工学研究科電子・数物系専攻

博士前期課程入学試験

試験科目群４

数理工学専門

試験問題

（解答時間 180 分）

注意

（１）受験番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（２）数理工学専門（数学）問題群から４題選択、あるいは、非線形力学、量子物理学、物性物理学の３科目から１科目のみを選択し、解答せよ。

（３）選択した科目名または解答問題番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（４）試験終了後、問題冊子は持ち帰ってよい。

数理工学専門（数学）　問題

数学の研究室を志望するものは，以下の問題群（全部で 16 題ある）から 4 題選択して，問題番号を解答用紙の所定欄に記入して解答せよ．1 題につき 1 枚の解答用紙を使用すること．

［1］ 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を満たすとし，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値連続関数とする．このとき，以下のことを証明せよ．ただし α, a, b は実数で $a < b$ とする．

(1) ある正の数 M が存在して，任意の自然数 n に対して $|x_n| \leq M$.

(2) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha)$.

(3) $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ ならば，任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) = 0$.

［2］ 微分方程式

$$x'' + 2x' + ax = f(t), \qquad ' = d/dt \tag{L_1}$$

について以下の問いに答えよ．ただし a, b は実数とし，$f(t)$ は実数値関数とする．

(1) $a = 1,\ f(t) = e^{bt}$ のとき，(L_1) の一般解を求めよ．

(2) $a = 2,\ f(t) = 2t^2$ のとき，(L_1) の一般解を求めよ．

(3) $a = -3,\ f(t) = 0$ のとき，$y = x'$ とおくと，(L_1) は連立微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{L_2}$$

に変換される．このとき，行列 A を求めよ．また，xy 平面における (L_2) の解軌道図の概略を描け．

数理工学専門（数学）問題は次ページに続く．

［３］ $A(t)$ を区間 $I\ (\subset \mathbb{R})$ で定義された $n \times n$ 行列値連続関数とし，微分方程式

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} \tag{E}$$

の n 個の解ベクトル $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ に対して，行列 $X(t)$ を

$$X(t) = \big(\boldsymbol{x}_1(t)\ \ \boldsymbol{x}_2(t)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{x}_n(t)\big)$$

と定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in I \times \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$ を満たす方程式 (E) の解はただ1つであることを示せ．

(2) 次の (i), (ii), (iii) は同値であることを示せ．

(i) 任意の $t \in I$ に対して $\det X(t) \neq 0$.

(ii) ある $t_0 \in I$ に対して $\det X(t_0) \neq 0$.

(iii) $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ は1次独立である．

(3) $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ が方程式 (E) の解ベクトルではなく，I で定義された連続微分可能なベクトル値関数とするとき，上記の (i) と (ii) は同値となるか．また, (ii) と (iii) は同値となるか．成立しない場合はそれぞれ反例をあげよ．

［４］ 微分方程式

$$x^2 \frac{du}{dx} + u = x \tag{A}$$

に関して，以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 (A) の $u(0) = 0$ である解を，形式的べき級数解として求めよ．

(2) (1) で求めた解の収束半径を求めよ．

(3) (1) の形式的べき級数解が $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ と表示できているとするとき，$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/n!)\, z^n$ とおく．このとき，$z \in [0, 1)$ において $v(z)$ を $\sum$ 記号を用いずに表せ．

(4) (3) の表示式を $\tilde{v}(z)$ とおく．この表示式は $z \geq 1$ でも定義されるとして，

$$w(x) = \int_0^{\infty} e^{-z/x}\, \tilde{v}(z)\, dz$$

とおく．このとき，$w(x)$ は，$x > 0$ で (A) の解であることを示せ．

数理工学専門（数学）問題は次ページに続く．

[５] 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立に，いずれも確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (0 < x < \infty)$$

をもつ確率分布に従うとする．ただし σ は未知母数 $(0 < \sigma < \infty)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(X^2)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に基づく σ^2 の最尤推定量 $\hat{\sigma}^2$ を求めよ．

(3) $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の不偏推定量であることを示せ．

(4) $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の一致推定量であることを示せ．

[６] 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立に，一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従うとする．確率変数 X_1, X_2 を変換した

$$Y_1 = \sqrt{-2\log X_1}\cos(2\pi X_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2\log X_1}\sin(2\pi X_2)$$

となる確率変数 Y_1, Y_2 を考える．このとき，確率変数 Y_1, Y_2 は互いに独立に，標準正規分布に従うことを示せ．

[７] $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を一様分布 $\mathrm{U}(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$ からの無作為標本とし，

$$\text{仮説 H} : \theta = 0, \qquad \text{対立仮説 K} : \theta \neq 0$$

を有意水準 α で検定する．

$$\max_{1 \le i \le n} |X_i| > c$$

ならば，仮説 H を棄却するとき，以下の問いに答えよ．

(1) c を n と α を用いて表せ．

(2) $\theta = 1/4$ とし，第 2 種の誤りの確率 β を n と α を用いて表せ．

数理工学専門（数学）問題は次ページに続く．

［8］X を可分な実ヒルベルト空間とする．その内積は (x,y) $(x,y\in X)$ で与えられ，そのノルムは $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ で定義される．このとき，以下の問いに答えよ．なお，点列 $\{\phi_n\}$ が ϕ_∞ に弱収束するとは，$\lim_{n\to\infty}(\phi_n,\psi)=(\phi_\infty,\psi)$ が任意の $\psi\in X$ に対して成立するときをいい，点列 $\{\phi_n\}$ が ϕ_∞ に強収束するとは，$\lim_{n\to\infty}\|\phi_n-\phi_\infty\|=0$ が成立するときをいう．

(1) X 内の点列 $\{x_n\}$ が $n\to\infty$ のとき，$x_\infty\in X$ に弱収束し，かつ $\|x_n\|\to\|x_\infty\|$ であれば，$\{x_n\}$ は x_∞ に強収束することを示せ．

(2) 点列 $\{x_n\}$ は X で一様有界とする．このとき，可算個の $y_k\in X$ $(k=1,2,\cdots)$ が存在して，$\{x_n\}$ の部分列 $\{\tilde{x}_n\}$ を上手く選べば，$\lim_{n\to\infty}(y_k,\tilde{x}_n)$ が存在して有限値になることを示せ．

(3) X が可分であることと (2) を用いて，任意の $y\in X$ に対して，$\lim_{n\to\infty}(y,x_n^*)$ が存在して有限値になるような $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_n^*\}$ が存在することを示せ．

［9］ 次の2次元正方形領域における波動方程式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\
u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=0, & x\in\Omega
\end{cases}
\qquad (P)
$$

を考える．ここで $\Omega=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x_1\le\pi,\ 0\le x_2\le\pi\}$ かつ境界 $\partial\Omega$ 上では常に $\varphi(x)=0$ であるとする．この問題の特異点をもたない解を見つけたい．以下の問いに答えよ．

(1) 解 $u(x,t)$ が変数分離形 $u(x,t)=U(x)T(t)$ で与えられるとしたとき，$U(x)$, $T(t)$ の満たす方程式を求めよ．

(2) (1) における $U(x)$ が $U(x)=V(x_1)W(x_2)$ と変数分離されるとしたとき，それぞれの満たす方程式と境界条件を求めよ．

(3) $\varphi(x)=\sin 2x_1\sin x_2$ のとき，初期値境界値問題 (P) の解を求めよ．

(4) 初期値境界値問題 (P) の 2 階連続微分可能な解はただ 1 つしかないことを示せ．

数理工学専門（数学）問題は次ページに続く．

［10］初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad (x \geq 1), \quad y(1) = 1 \tag{$*$}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y(x)$ を初期値問題 $(*)$ の解とし，$x_n = 1 + nh$ とおく．ただし，$h > 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ である．このとき，オイラー法を用いて，$y(x_1)$ と $y(x_2)$ の近似値 y_1 と y_2 を h を用いて表せ．さらに，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{|y(x_2) - y_2|}{h^2}$$

を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，2 点 $(x_{n-1}, f_{n-1}), (x_n, f_n)$ を通る直線を $p_1(x)$ とおく．ただし，$f_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ である．このとき，

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_1(x) dx$$

を h, f_{n-1}, f_n を用いて表せ．

(3) 漸化式

$$Y_{n+1} = Y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_1(x) dx$$

で定義された数列 $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える．ただし，$f_n = 2Y_n / x_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, $Y_0 = 1, Y_1 = y_1$ である．このとき，Y_2 を h を用いて表し，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{|y(x_2) - Y_2|}{h^2}$$

を求めよ．

(4) 任意の自然数 n に対して，

$$|y(x_{n+1}) - Y_{n+1}| = O(h^2) \quad (h \to 0)$$

を示せ．ただし，実数値関数 F, G に対して，ある正の数 a と M が存在して，

$$\left| \frac{F(h)}{G(h)} \right| < M, \quad h \in (0, a)$$

が成立するとき，$F(h) = O(G(h))$ $(h \to 0)$ と表記する．

数理工学専門（数学）問題は次ページに続く．

[11] 以下の問いに答えよ．

(1) f が $|z| \leq 1$ で正則で，$|a| < 1$ ならば，関数 $g(z) := (1 - \bar{a}z)f(z)$ も $|z| \leq 1$ で正則であり，$|z| = 1$ のとき，$\dfrac{|g(z)|}{|z-a|} = |f(z)|$ が成り立つことを示せ．

(2) f は $|z| \leq 1$ で正則であり，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta \leq 1$$

を満たすとする．$|a| < 1$ のとき，

$$|f(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

が成り立つことを示せ．

[12] f, g は複素平面内の領域 D 上の定数でない有理形関数とし，

$$\varphi = \frac{f''}{f'} - \frac{2f'}{f}, \qquad \psi = \frac{g''}{g'} - \frac{2g'}{g}, \qquad \Phi = \varphi - \psi$$

とおく．$a \in D$ とし，p は正の整数とする．以下のことを示せ．

(1) f が a を 1 位の極にもつならば，a は φ の極ではない．

(2) f, g が共に a を p 位の極にもつならば，a は Φ の極ではない．

(3) f が a を零点にもつならば，a は φ の 1 位の極である．

(4) f, g が共に a を 1 位の零点にもつならば，a は Φ の零点である．

[13] $R > 1$ とし，m, n は $2n \geq m + 1$ を満たす非負の整数とする．また，D は複素平面内の領域

$$D : |z| < R,\ 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{2\pi}{2n+1}$$

として，C は D の境界とする．ただし，C は正の方向に向きづけられているものとする．複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^m}{z^{2n+1}+1}\, dz$ を考えることにより，

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^{2n+1}+1}\, dx = \frac{\pi}{(2n+1)\sin\left(\dfrac{m+1}{2n+1}\pi\right)}$$

を示せ．

数理工学専門（数学）問題は次ページに続く．

[14] 可換環 R について，次の (A), (B), (C) が同値であることを証明せよ．

(A) R の任意のイデアルは有限生成である．

(B) R のイデアルの列 I_i が $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_i \subset \cdots$ を満たすならば，ある n が存在して，$I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ ．

(C) $\mathcal{J}$ を R のイデアルからなる空でない集合族とすると，ある $I_0 \in \mathcal{J}$ が存在して，すべての $I \in \mathcal{J}$ に対して $I \subset I_0$.

[15] ある市場があり，そこで独占的企業Aは利潤を20億円得ている．これに対して市場参入を希望する企業Bが，この市場への参入の意思決定を行う．もし企業Bが参入しなければ，企業Aはそのままの利潤を得ることができ，企業Bの利潤はゼロである．企業Bが参入を強行した場合，企業Aが敵対的競争を仕掛けて対抗し，お互いに利潤は2億円の赤字となる．一方で，企業Aが共存共栄をはかり参入に協調的に対処すると，お互いに利潤5億円を得る．2つの企業はどのように行動するかを考える．以下の問いに答えよ．記号等必要になれば自由に定義してよい．

(1) このゲームを戦略形ゲームで書き直した場合の payoff matrix を求めよ．

(2) このゲームのナッシュ均衡を求めよ．

[16] n 次元ユークリッド空間から m 次元ユークリッド空間への多価関数を考える．この関数が upper hemicontinuous であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．記号等必要になれば自由に定義してよい．

(1) upper hemicontinuous の定義を述べよ．

(2) X を n 次元ユークリッド空間のコンパクト部分集合とする．その像はどのような集合であるか，証明を付けて答えよ．

(3) 角谷の不動点定理を述べよ．

非線形力学　問題

［1］物理量 x が以下の方程式に従うものとする。μ はパラメーターである。それぞれに指定された μ の範囲において、固定点をすべて求め、安定性を調べよ。また、固定点の分岐図を描き、分岐点における μ の値と分岐の名称を答えよ。なお、分岐図において、安定なブランチは実線で、不安定なブランチは点線で描くこと。

(a) $\dot{x} = \mu - 2x^2 \qquad (-\infty < \mu < \infty)$

(b) $\dot{x} = \mu x - \dfrac{x}{1+x^2} \qquad (\mu > 0)$

［2］1次元写像系 $x_{n+1} = r x_n \exp(-x_n)\ (n = 0, 1, \ldots)$ を考える。$r\ (>0)$ はパラメーターである。以下の問いに答えよ。

（1）固定点をすべて求め、安定性を調べよ。

（2）r を 0 から大きくしていくとき、最初に周期倍分岐が起こる r の値を求めよ。

（3）安定な固定点が存在する r の区間において、リャプノフ指数 λ を求めよ。

［3］細くて軽い長さ l のまっすぐな棒の一端に大きさの無視できる質量 m のおもりをつけ、他端を水平な軸にとりつける。棒は水平軸に垂直な鉛直面内でのみ動くものとし、おもりには速度に比例する抵抗力が働くものとする。このとき、棒が下向きの鉛直線となす角を θ とすると、以下の運動方程式が得られる。

$$ml\ddot{\theta} + \eta l\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0.$$

ここで、g は重力加速度の大きさであり、$\eta\ (>0)$ は定数である。以下の問いに答えよ。

（1）$x = \theta, y = \dot{\theta}$ とおいて、上の方程式を x と y の1階連立微分方程式に変換せよ。

（2）固定点をすべて求めよ。ただし、$0 \leq x < 2\pi$ とする。

（3）上で求めた固定点の安定性とタイプ（ノード、サドル、フォーカスの何れであるか）を調べよ。ただし、固定点が異なるタイプの境界にある場合は除いてよい。

［4］以下の問いに答えよ。

（1）自律系のリミットサイクルが安定であるための条件をフロケ指数を用いて述べよ。

（2）単峰の1次元写像系 $x_{n+1} = F(x_n)\ (n = 0, 1, \ldots)$ における軌道点の分布密度 $P(x)$ が従う方程式（ペロン・フロベニウスの方程式）を導け。

（3）カオスアトラクターを特徴づける一般化次元 D_q の定義を示せ。相空間を1辺の長さが ϵ のセル（広い意味での立方体）に分割し、i 番目のセルに軌道点が来る確率を p_i として答えよ。なお、$q\ (-\infty < q < \infty)$ はパラメーターである。また、D_0 がどのような次元と等価であるかを理由をつけて答えよ。

量子物理学　問題

※３ページにわたって問題は全部で３題ある．

問題 1.

井戸型ポテンシャルに閉じ込められた電子による光吸収について考えよう．まず，ハミルトニアン H_0 で記述される無摂動系に，摂動として振動外場 $V(t) = V_0 e^{-i\omega t}$ が加えられた場合の遷移確率について考える．ここで，V_0 は時間 t に依らない演算子であり，ω は角振動数を表す．

(1) シュレディンガー表示での波動関数を $\phi_{\mathrm{S}}(t)$ とする．ハミルトニアンを $H_0 + V(t)$ として，時間に依存するシュレディンガー方程式を示せ．

(2) $\phi(t) = e^{iH_0 t/\hbar}\phi_{\mathrm{S}}(t)$ により，相互作用表示（または中間表示）での波動関数を導入する．$\phi(t)$ に対するシュレディンガー方程式を示せ．

(3) (2) の方程式を時刻 $t = -T$ から T まで積分することにより，$\phi(t)$ に対する積分方程式が導かれる．その方程式を 1 次摂動の範囲で近似することにより，$\phi(T) = \left[1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{-T}^{T} dt V_{\mathrm{I}}(t)\right]\phi(-T)$，となることを示せ．ここで $V_{\mathrm{I}}(t)$ は $V(t)$ の相互作用表示である．

(4) いま，T は非常に大きく $T \sim +\infty$ と考えてよいものとする．また，初期時刻 $t = -T$ において，系は H_0 の固有状態 ϕ_i にあるとする．時刻 $t = T$ において，系が H_0 の別の固有状態 ϕ_f に遷移している確率は $|\langle\phi_f|\phi(T)\rangle|^2$ で与えられる．これらのことから，1 次摂動の近似のもとでの単位時間あたりの遷移確率が次式で与えられることを示せ．

$$P_{i\to f}(\omega) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\phi_f|V_0|\phi_i\rangle\right|^2 \delta(\hbar\omega + E_i - E_f).$$

ここで，E_i, E_f は，それぞれ ϕ_i, ϕ_f の固有エネルギーである．必要なら，十分大きな T，実変数 Ω に対して成り立つ関係式，$\left|\int_{-T}^{T} e^{-i\Omega t/\hbar}dt\right|^2 \sim 4\pi T\hbar\delta(\Omega)$ を用いてよい．

次に，以下の式で与えられる井戸型ポテンシャル $U(x)$ のもとで x 軸上を運動する質量 m の電子について考える．

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < a) \\ +\infty & (|x| \geq a) \end{cases}.$$

(5) 固有エネルギーを E として，定常状態に対するシュレディンガー方程式を示せ．

(6) 規格化された固有関数と対応するエネルギー固有値を求めよ．

(7) いま，基底状態にある系に光が照射されて，摂動ポテンシャル $V(t) = Fxe^{-i\omega t}$ が加えられたとする．F は定数である．(6) で求めた励起状態への単位時間あたりの遷移確率を求めよ．

(8) 光吸収のスペクトル関数を $I(\omega) = \sum_f P_{g\to f}(\omega)$ で定義する．ここで g は基底状態を表し，和はすべての励起状態を含む．総和則 $\int_0^{+\infty} I(\omega)d\omega = \frac{2\pi F^2}{\hbar}\langle\phi_g|x^2|\phi_g\rangle$ が成り立つことを示し，単位時間あたりの遷移確率の総和について a 依存性を議論せよ．

（「量子物理学　問題」次ページに続く）

問題 2.

古典力学では,「力学系のポテンシャルエネルギー V が位置座標の n 次同次関数であり, 系の運動が有限の領域内に限られている場合, 運動エネルギー T と V の長時間平均 $\langle T\rangle$, $\langle V\rangle$ に対して $2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$ の関係が成り立つ.」というビリアル定理が知られている. 例えば３次元調和振動子の場合, バネ定数を k とすると, ポテンシャルエネルギーは $V(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)/2$ で与えられる２次の同次関数であり, $\langle T\rangle = \langle V\rangle$ なる関係が成り立つことはよく知られている. ここでは, 量子力学においてもこの種の定理が成り立つことを示そう.

(1) k を自然数として, 位置演算子 x と対応する運動量演算子 p に対し, 次の交換関係が成り立つことを示せ.

(i) $[x, p^k] = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p} p^k$, (ii) $[x, f(p)] = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p} f(p)$. ただし, $f(p)$ は p の関数である.

(2) ２つの交換子 $[p, x^k]$, $[p, g(x)]$ を (1) と同様の形式で表せ. ただし, $g(x)$ は x の関数である.

いま, ハミルトニアン $H = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{{p_j}^2}{2m_j} + V(x_1, \cdots, x_N)$ で記述される系を考えよう. ただし, 系の運動は有限な領域内に限られている, すなわち束縛状態で, 離散的な固有エネルギーをもつものとする. ここで, V は n 次の同次関数であるので, $\sum_{j=1}^{N} x_j(\partial V/\partial x_j) = nV$ が成り立つことに注意しよう. 以下, ハイゼンベルグ表示で考える.

(3) ハイゼンベルグ表示での演算子 $A(t)$ に対し, ハイゼンベルグ方程式 $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$ が成り立つことを示せ.

(4) (1) から (3) の結果を利用して, 位置演算子 x_j と対応する運動量演算子 p_j に対し, 次の関係が成り立つことを示せ.

(i) $dx_j/dt = p_j/m_j$, (ii) $dp_j/dt = -\partial V/\partial x_j$.

(5) 運動エネルギーを表す演算子を T とする. $2T - nV = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{dx_j}{dt} p_j + x_j \frac{dp_j}{dt} \right)$ の関係が成り立つことを示せ.

(6) 系の固有関数 ϕ_m, ϕ_l の固有エネルギーをそれぞれ E_m, E_l とする. 次の関係が成り立つことを示せ.

$$\langle \phi_m | \frac{dx_j}{dt} | \phi_l \rangle = \frac{i}{\hbar}(E_m - E_l)\langle \phi_m | x_j | \phi_l \rangle.$$

(7) 系の固有関数 ϕ_m に関する期待値として, $2\langle \phi_m | T | \phi_m \rangle = n\langle \phi_m | V | \phi_m \rangle$ の関係が成り立つことを示せ.

(8) ヘリウム原子について考える. 簡単のため, $+2e$ の電荷をもつ原子核は空間中に固定されているとしよう. 原子核から見た２個の電子の位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ として, 全ポテンシャルエネルギー V を与えよ. さらに, ２電子系について $\langle T\rangle$ と $\langle V\rangle$ の関係を定めよ.

(「量子物理学　問題」次ページに続く)

問題 3.

xy 面内を運動する，電荷をもった調和振動子の磁場中での運動について考察する．はじめに，磁場のない場合を考えよう．系の運動は，ハミルトニアン $H_0 = H_x + H_y$ で記述される．ただし，

$$H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\,; \qquad H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2,$$

であり，m は粒子の質量，ω は古典的取扱いにおける単振動の角振動数である．

(1) x 軸方向の運動を表す H_x について，消滅演算子 b_x，および生成演算子 b_x^+ を次式で導入する．

$$b_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,; \qquad b_x^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,.$$

交換関係 $[b_x, b_x^+]$ を求め，b_x, b_x^+ を用いて H_x を表せ．

(2) 数演算子 $b_x^+ b_x$ の固有値 $n_x\ (0, 1, 2, \cdots)$ に対応する規格化された固有状態を $|n_x\rangle$ とする．$|0\rangle$ および b_x^+ を用いて $|n_x\rangle$ を表せ．計算過程は示さなくてもよい．

(3) y 軸方向の運動についても同様に，消滅演算子 b_y，生成演算子 b_y^+ を導入し，$b_y^+ b_y$ の固有状態 $|n_y\rangle$ を構成する．このとき，積状態 $|n_x, n_y\rangle \equiv |n_x\rangle|n_y\rangle$ は H_0 の固有状態でもある．量子数 (n_x, n_y) を用いて H_0 の固有値を表せ．

次に，H_0 で記述される系に一様な大きさ B の磁場が z 軸方向にかけられた場合について考える．粒子の電荷を q，ベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}$，光速を c とすると，系のハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2 + \frac{m\omega^2}{2}r^2,$$

で与えられる．ただし，$r^2 = x^2 + y^2$，$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, 0)$ である．A の選び方に自由度はあるが，ここでは対称ゲージをとり，$\boldsymbol{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ としよう．

(4) このように選んだ $\boldsymbol{A}$ が題意の磁場を正しく記述することを示せ．

(5) H のうち，B に比例する項を H_1，B^2 に比例する項を H_2 として $H = H_0 + H_1 + H_2$ と表す．仮に，ハミルトニアン $H' = H_0 + H_2$ を考えると，これは角振動数が ω' である 2 次元調和振動子の運動に対応することが分かる．角振動数 $\omega_C \equiv qB/2mc$ および ω を用いて ω' を表せ．

(6) H_1 を ω_C，および角運動量演算子 $L_z \equiv xp_y - yp_x$ を用いて表せ．

(7) いま，L_z は保存量であり，H' と同時対角化可能である．これは系がもつどのような対称性に基づく結果であるか，次の選択肢（ア）〜（エ）の中から適切なものを選び記号で答えよ．

（ア）z 軸方向並進対称性,（イ）z 軸まわりの回転対称性,（ウ）時間反転対称性,（エ）その他.

(8) 量子数 (n_x, n_y) で記述される H' の固有状態を $|n_x, n_y\rangle$ とする．L_z の形から，$M \equiv n_x + n_y$ が一定となる部分空間で，L_z がブロック対角化されていることが分かる．$M = 1$ の空間，すなわち $|1, 0\rangle$ および $|0, 1\rangle$ を基底として L_z を対角化し，L_z の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(9) $M = 2$ の空間で考える．全系のハミルトニアン H に対応する固有値をすべて求めよ．

(「量子物理学　問題」ここまで)

物性物理学　問題

1. シリコンやゲルマニウムの結晶構造は、2 つの面心立方構造が重なった構造と見なすことができる。この構造に対して通常は図 1 に示す立方体の単位格子（単位胞）が採用される。単位格子の稜に沿って xyz 軸（右手系）をとり、格子定数を a とおくと、結晶軸ベクトルは、

$$\boldsymbol{a}_1 = (a, 0, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, a, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, a),$$

と書くことができる。

(1) この結晶構造の名前、およびこの結晶における主要な原子間結合の名前を答えよ。

(2) 結晶中の原子間には引力だけでなく斥力もはたらく。原子間斥力の主な原因について簡潔に説明せよ。

(3) 各原子は最近接原子と正四面体結合を形成している。正四面体結合の間の角を θ とおくと、$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ となることを示せ。

(4) 逆格子の軸ベクトル $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$、$\boldsymbol{b}_3$ を

$$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 2\pi\,\delta_{ij} \qquad (i, j) = (1, 2, 3)$$

によって定義する。結晶の (hkl) 面は逆格子ベクトル $\boldsymbol{G} = h\boldsymbol{b}_1 + k\boldsymbol{b}_2 + l\boldsymbol{b}_3$ に垂直であることを示せ。

(5) ベクトル $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$、$\boldsymbol{b}_3$ を成分表示せよ。

(6) 1 つの単位格子あたり 8 個の原子が含まれている。それら 8 個の原子位置を $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ を用いて表せ。ただし、そのうち 1 つの原子位置は $0\cdot\boldsymbol{a}_1 + 0\cdot\boldsymbol{a}_2 + 0\cdot\boldsymbol{a}_3$ とせよ。さらに原子構造因子を f とおいて、逆格子ベクトル $\boldsymbol{G} = H\boldsymbol{b}_1 + K\boldsymbol{b}_2 + L\boldsymbol{b}_3$ に対する（HKL 反射に対する）構造因子を書き下せ。

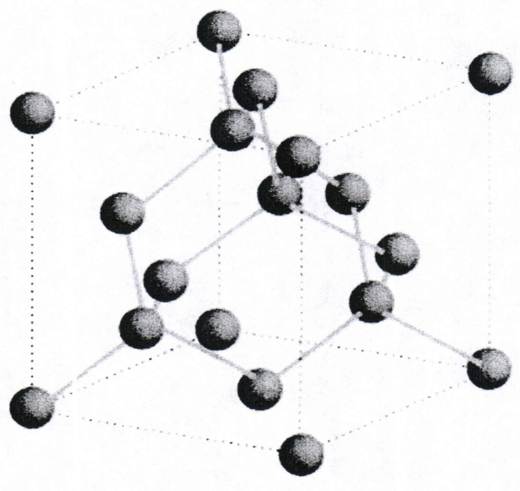

図 1

（「物性物理学　問題」次ページに続く）

(7) この結晶構造による X 線回折の許容反射は、指数 HKL が 3 つとも偶数かつその和が 4 の倍数、または 3 つとも奇数となることを示せ。

(8) 銅をターゲットとした X 線管からは、波長 1.5×10^{-10} m の $K\alpha$ 線が通常最も強く放射される。プランク定数を 6.6×10^{-34} Js、光速度を 3.0×10^{8} m/s、電子の電荷を 1.6×10^{-19} C として、この特性 X 線のエネルギーを求め電子ボルトの単位で示せ。

(9) この結晶に対する基本並進ベクトルは、例えば

$$\boldsymbol{A}_1 = (a/2, a/2, 0), \quad \boldsymbol{A}_2 = (0, a/2, a/2), \quad \boldsymbol{A}_3 = (a/2, 0, a/2),$$

ととることができる。結晶軸ベクトル $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ をとって考えたときの (100) 面および (110) 面を基本並進ベクトル $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$ で考えると面指数はそれぞれどのようになるか答えよ。

(10) 図 2 は、ゲルマニウムの[111]方向のフォノンの分散関係を示した図である。（還元）波数が 0 のとき、周波数 ν が 0 となる分枝とそうでない分枝の名前をそれぞれ答えよ。また、それぞれの分枝に属するフォノンの振動の特徴について簡潔に述べよ。

(11) [111]方向は対称性が高いために図 2 では 4 本の分枝しか見られないが、この結晶構造に対して期待される分枝は全部で何本か。

(12) 波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ をもつ格子振動の波と任意の逆格子ベクトル $\boldsymbol{G}$ だけ異なる波動ベクトル $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G}$ をもつ格子振動の波とが物理的に等価となる理由を説明せよ。

(13) 第 1 ブリルアン・ゾーンについて簡潔に説明せよ。また、その領域内に存在する許容な波動ベクトルの総数は何で決まるか答えよ。

(14) 格子比熱に関するデューロン-プティの法則、アインシュタイン・モデルおよびデバイ・モデルについてそれぞれ簡潔に説明せよ。

(15) 2 つのフォノンが衝突して 1 つのフォノンを生じる際の、正常過程とウムクラップ過程の違いについて説明せよ。

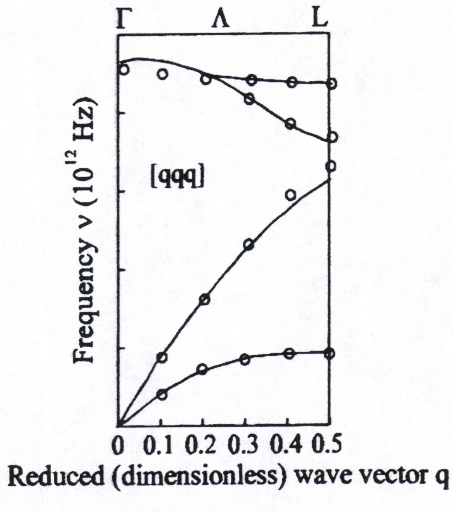

図 2

（「物性物理学　問題」次ページに続く）

(16) ブロッホの定理とはどのようなものか。簡潔に説明せよ。

(17) この結晶構造では、電子が結晶中で感じるポテンシャル

$$U(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G}} U_{\boldsymbol{G}}\, e^{i\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}}$$

のフーリエ成分 $U_{\boldsymbol{G}}$ は $\boldsymbol{G} = 2\boldsymbol{b}_1$ の場合 0 となることを示せ。また、このことから、エネルギーギャップが 0 となることが予想されるのはどのような条件を満たす波動ベクトルか答えよ。

2. 自由電子フェルミ気体による金属の自由電子のモデル化に関する以下の問いに答えよ。

(1) このモデルの重要なパラメーター（物理量）を 2 つ挙げ、重要と考えられる理由をそれぞれ簡潔に述べよ。

(2) 極低温における比熱の温度依存性はどのようになるか。

(3) 電子比熱測定による熱的有効質量が自由電子の質量と異なる原因として考えられるものを 2 つ以上挙げよ。

3. 結晶中の伝導電子の運動に対して平均衝突時間 τ が定義できて、運動方程式が

$$m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}$$

で与えられるとする。ここで m と $\boldsymbol{v}$ は電子の質量と速度、$\boldsymbol{F}$ は外力である。z 軸方向に一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ を加えた場合を考える。ただし、$B \geq 0$、また電子の電荷を $-e$ とする。

(1) 電場を $\boldsymbol{E} = (E_x,\ E_y,\ E_z)$ として、定常状態における電子の各速度成分 v_x、v_y および v_z を求めよ。

(2) x 軸方向に定常電流を流し、y 軸方向には電流が流さない場合、y 軸方向に生じる電場 E_y を m、e、τ、B および E_x を用いて表せ。

(3) いったん $B = 0$ としてから、x、y および z 軸方向の長さがそれぞれ 7.0、2.0 および 1.0 mm の直方体形試料の x 軸方向に 2.1 V の電圧を印加したところ、0.80 mA の電流が流れた。この試料の電気伝導率 σ [1/Ωm] を計算せよ。

(4) 次に $B = 85$ mT に設定し、(3)と同一試料の x 軸方向に 0.50 mA の電流を流したところ、y 軸に垂直な側面間に 0.43 mV の電位差が生じた。このときの流動速度の大きさ v_x [m/s] を計算せよ。

(5) 上記のような測定から試料に関して一般にどのようなことを知ることができるか簡潔に述べよ。