

(電子・数物系専攻 博士前期課程)

(2015. 8)

平成 28 年度

大阪府立大学大学院
工学研究科電子・数物系専攻
博士前期課程入学試験

試験科目

数理工学基礎・数学系
(線形代数、微積分)

試験問題

(解答時間 180 分)

注意

- (1) 受験番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。
- (2) 解答した科目名(線形代数、微積分)を解答用紙の所定欄に記入せよ。
- (3) 解答欄が不足する場合は、新たに解答用紙を配付するので、挙手すること。
- (4) 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってよい。

線形代数 問題

1. \mathbb{R}^4 において

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とする. W_1, W_2 を \mathbb{R}^4 の部分空間とし, W_1 は \mathbf{a}, \mathbf{b} で張られる部分空間, W_2 は \mathbf{c}, \mathbf{d} で張られる部分空間とする. このとき, $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元と一組の基底をそれぞれ求めよ. ここで

$$W_1 + W_2 = \{ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{x} \in W_1, \mathbf{y} \in W_2 \}$$

である.

2. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (2) A を直交行列を用いて対角化せよ.

3. $B = (b_{ij})$ を n 次の実対称行列とし, 任意の n 次元列ベクトル $\mathbf{x} (\in \mathbb{R}^n)$ に対して

$${}^t \mathbf{x} B \mathbf{x} \geq 0$$

が成り立つとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) B の固有値は非負であることを示せ.
- (2) $b_{ii} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) であることを示せ.
- (3) ある i に対して $b_{ii} = 0$ であるならば, $j \neq i$ となる j に対して $b_{ij} = 0$ であることを示せ.

微積分 問題

1. $x > 0$ に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 1 + ax^2 - \log x$$

と定める. ただし, a を実数の定数とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ.
 (2) $F(x, y) = f(x \sin^{-1} y)$ ($x > 0, -1 < y < 1$) とおくと

$$\frac{\log x}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\sin^{-1} y}{x} \frac{\partial F}{\partial y}$$

を計算せよ. ただし, $\sin^{-1} y$ は逆正弦関数の主値を表す.

2. 関数 $g(x) = \frac{2}{4x^2 - 8x + 3}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $g(x)$ のマクローリン展開とその収束半径を求めよ.
 (2) 広義積分 $\int_2^{\infty} \{g(x)\}^2 dx$ を計算せよ.

3. 次の2重積分の値を求めよ.

(1) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2) dy \right\} dx$

(2) $\iint_D xy \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$