(電子・数物系専攻 博士前期課程) (2015.8)

平成２８年度

大阪府立大学大学院
工学研究科電子・数物系専攻
博士前期課程入学試験

試験科目

数理工学専門・数学系
試験問題

(解答時間 180 分)

注意

（１）受験番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。
（２）問題群（全部で１２題ある）から３題選択し、解答せよ。
（３）選択した解答問題番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。
（４）１題につき１枚の解答用紙を使用すること。
（５）試験終了後、問題冊子は持ち帰ってよい。

［1］ 常微分方程式

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t,x) \qquad (E)$$

について，次の問いに答えよ．ただし，a, b, c は実数または t の関数とし，$f(t,x)$ は実数値関数とする．

(1) $a = 0,\ b = 1,\ c = -1,\ f(t,x) = -x^2$ のとき，方程式 (E) の一般解を求めよ．またこのとき，$x(0) = \alpha$ を満たす方程式 (E) の解が $t \to \infty$ のとき，正の定常解に収束するための α の範囲を求めよ．

(2) $a = 1, b = -4, c = 5, f(t,x) = e^{2t}\sin\beta t$ のとき，方程式 (E) の一般解を求めよ．ただし，β は正の定数とする．

(3) $a = t,\ b = -1,\ c = 4\gamma t^3,\ f(t,x) = 0$ のとき，変数変換 $s = t^2$ を利用して，方程式 (E) の一般解を求めよ．ただし，γ は実数の定数とする．

［2］ 以下の問いに答えよ．

(1) 正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ の虚部 $v(x,y)$ が

$$v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$$

で与えられるとき，実部 $u(x,y)$ を求めよ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{kz}}{z}dz$ $(C : |z| = 1)$ の値を求め，これを利用して

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)\,d\theta = 2\pi$$

を示せ．ただし，k は実数の定数とする．

(3) 複素平面内の閉集合 $|z| \leq 1$ において，関数 $g(z) = z^2 - z - 2$ の絶対値の最大値を求めよ．

問題は次ページに続く．

[3] a を $0<a<1$ を満たす定数とするとき，1次元の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)(u-a) \qquad (*)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $u=u(x,t)$ が方程式 (*) の解であるとき，$z=x-ct$ かつ $\phi(z)=u(x,t)$ とおくと，ϕ はどのような方程式を満たすか．

(2) (1) で得られた方程式において，$c=0$ かつ $a=1/2$ とする．このとき，(1) で得られた方程式の両辺に ϕ' をかけて不定積分することで得られる方程式を求めよ．

(3) (2) で得られた方程式を，積分定数が 0 で，$\phi(0)=1/2$ の条件の下で解け．

(4) ϕ の性質を利用して，$a\neq 1/2$ のとき，$c=\sqrt{2}(1/2-a)$ の場合の方程式 (*) の解を1つ求めよ．

[4] 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に，いずれも一様分布

$$\mathrm{U}(\mu-\lambda/2, \mu+\lambda/2)$$

に従うものとする．ただし，μ, λ は未知母数 $(-\infty<\mu<\infty, 0<\lambda<\infty)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{E}(X_1), \mathrm{E}(X_1^2), \mathrm{Var}(X_1)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に基づく μ, λ のモーメント法による推定量 $\hat{\mu}, \hat{\lambda}$ を求めよ．

(3) $\hat{\mu}$ は μ の不偏推定量であることを示せ．

(4) $\hat{\mu}$ は μ の一致推定量であることを示せ．

問題は次ページに続く．

［５］確率変数 Z_α の確率密度関数が

$$f_{Z_\alpha}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Phi(\alpha z) \quad (-\infty < z < \infty)$$

で与えられているとする．ただし，α は実数の定数とし，$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) Z_0 の確率密度関数 $f_{Z_0}(z)$ を求めよ．

(2) 期待値 $\mathrm{E}(Z_0)$ および分散 $\mathrm{Var}(Z_0)$ を求めよ．

(3) $\mathrm{E}(\Phi(hZ_0+k)) = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{h^2+1}}\right)$ を示せ．ただし，h，k は実数の定数とする．

(4) Z_α の積率母関数 $\mathrm{M}_{Z_\alpha}(t) = \mathrm{E}\left(e^{tZ_\alpha}\right)$ $(t \in \mathbb{R})$ を $\Phi(\cdot)$ を用いて表せ．

(5) 期待値 $\mathrm{E}(Z_\alpha)$ および分散 $\mathrm{Var}(Z_\alpha)$ を求めよ．

［６］p を奇素数，S_{p-1} を $(p-1)$ 次対称群とする．$1 \leq a \leq p-1$ を満たす自然数 a に対して，$\sigma_{a,p} \in S_{p-1}$ を

$$\sigma_{a,p}(i) \equiv ai \pmod{p} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．ただし，(1)，(2) については，S_{p-1} の元の標準的な表し方 ($\sigma \in S_{p-1}$ に対して，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(p-1) \end{pmatrix}$, $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p-1) \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ で表す) で答えよ．

(1) $\sigma_{4,11}$ を求めよ．

(2) $\sigma_{4,11}$ の逆元 $\sigma_{4,11}^{-1}$ を求めよ．

(3) $\sigma_{4,11}$ を，文字を共有しない巡回置換の積で表せ．

(4) $\sigma_{4,11}$ の位数を求めよ．

(5) S_{p-1} の長さ $p-1$ の巡回置換の個数を p を用いて表せ．

(6) $\sigma_{a,p}$ が長さ $p-1$ の巡回置換であるためには，$a^k \equiv 1 \pmod{p}$ となる最小の自然数 $k\ (\geq 1)$ が $p-1$ であることが必要十分であることを証明せよ．

問題は次ページに続く．

［7］$p \in \mathbb{Z}$ は素数，$a \in \mathbb{Z}$ は p の倍数でない整数とする．有理整数環 $\mathbb{Z}$ の剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}/ap\mathbb{Z}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 対応 $x + ap\mathbb{Z} \mapsto x + p\mathbb{Z}$ は，環準同型写像 $\pi_1 : \mathbb{Z}/ap\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を定義する．これを示せ．

(2) π_1 の像 $\mathrm{Im}\,\pi_1$ は何か．

(3) π_1 の核 $\mathrm{Ker}\,\pi_1$ は何か．

(4) $\mathbb{Z}/ap\mathbb{Z}$ のイデアル $p\mathbb{Z}/ap\mathbb{Z}$ は素イデアルか．

(5) $\mathbb{Z}/ap\mathbb{Z}$ のイデアル $a\mathbb{Z}/ap\mathbb{Z}$ が素イデアルとなるための必要十分条件を書け．

(6) 環準同型写像 $\pi : \mathbb{Z}/ap\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\pi(x + ap\mathbb{Z}) = (x + a\mathbb{Z}, x + p\mathbb{Z})$ で定義する．π は単射であることを示せ．

(7) (6) の π は全射であることを示せ．

(8) 整数 α, β で $\alpha a + \beta p = 1$ となるものが存在することを示せ．

［8］以下の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X を定義域とする連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と連続写像 $T : X \to X$ が与えられているとする．X が連結で，合成写像 $T \circ T$ が X の恒等写像であるとき，$f(T(p)) = f(p)$ を満たす X の点 p が存在することを示せ．

(2) n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D_k を $D_k = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq k \right\}$ で定める．$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 K が原点を含まないならば，$K \subset D_i$ を満たす自然数 i が存在することを示せ．

(3) (X, d) を距離空間とし，$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X の点列とする．X の点 p が条件「任意の自然数 i に対して $\{n \in \mathbb{N} \mid d(a_n, p) < \frac{1}{i}\}$ は有限集合ではない」を満たすとき，すべての項が自然数からなる狭義単調増加数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < n_{i+1} < \cdots$ で X の点列 $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ が p に収束するものが存在することを示せ．

問題は次ページに続く．

［9］ 以下の問題 (A), (B) に答えよ．

(A) 次の定数記号，関数記号，述語記号で定まる1階述語論理の言語を $\mathcal{L}$ で表す．変数記号としては $x_0, x_1, \ldots$ を使う．2項関数記号と2項述語記号は中置記法で表し，必要に応じて括弧を使う．

定数記号 $0, 1, 2, 3, \ldots$

関数記号 $+, \times, E$ （いずれも2項関数記号）

述語記号 $=$（等号），$<$（2項述語記号）

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1階述語論理の項と論理式の一般的な構成規則に従って，次の記号列を，(言語 $\mathcal{L}$ の) (i) 項 (ii) 論理式 (iii) 項でも論理式でもない の3つに分類せよ（類型ごとにまとめて書くこと）．

$x_0,\quad -1,\quad x_1 E x_3,\quad 2x_2,\quad 3\times x_4,\quad 5<1,\quad x_1>2,\quad \neg(x_1<2),$
$x_2 \leq 4,\quad x_1=7,\quad \neg(x_2=7),\quad x_3\neq 7,\quad 1=3\wedge x_2<4,\quad \neg x_4,$
$x_3\wedge x_5,\quad 1<x_1<5,\quad x_1=x_2=x_3,\quad 3=5\,E\,2\rightarrow x_2<9,$
$\forall x_1\,(3\times x_1),\quad \forall x_1\,(x_1<1),\quad \exists x_2\,(1<3).$

(2) 言語 $\mathcal{L}$ の論理式を自然数の集合 $\mathbb{N}$ （0は自然数とする）における通常の算術と順序関係のストラクチャーで自然に解釈する（ただし E は冪乗を表す，すなわち $2\,E\,3$ は 2^3 を意味する）．次のそれぞれの数学的主張を，言語 $\mathcal{L}$ の論理式で記述せよ．

(a) 0は最小の自然数である．

(b) 最大の自然数は存在しない．

(c) x_1 は奇数である．

(d) 奇数の冪乗は奇数である．

(e) 奇数と奇数の和は偶数である．

(f) x_1 は素数である．

(g) 素数は無限個存在する．

(h) 3以上のどの n についても，${x_1}^n+{x_2}^n={x_3}^n$ を満たす1以上の自然数 x_1, x_2, x_3 の組は存在しない（フェルマー・ワイルズの定理）．

問題は次ページに続く．

(B) 等号以外に2項述語記号 $<$ だけをもち，定数記号，関数記号をもたない言語を $\mathcal{L}_<$ で表す．$\mathcal{L}_<$ に対応するストラクチャーとして，$\mathcal{N} = (\mathbb{N}; <_{\mathbb{N}})$, $\mathcal{D} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}; |)$, $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}; <_{\mathbb{Q}})$ を考える．ただし $<_{\mathbb{N}}$, $<_{\mathbb{Q}}$ はそれぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ における通常の大小関係とし，$|$ は1以上の整数の整除関係（すなわち $m \mid n \iff$「m は n を割り切る」）を表す．$\mathcal{L}_<$ の閉論理式 $\varphi_{\mathrm{N}}, \varphi_{\mathrm{T}}, \varphi_{\mathrm{L}}, \varphi_{\mathrm{D}}$ を

$\varphi_{\mathrm{N}} : \forall x_1 \left(\neg(x_1 < x_1)\right)$

$\varphi_{\mathrm{T}} : \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \left((x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3) \to x_1 < x_3\right)$

$\varphi_{\mathrm{L}} : \forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 = x_2 \vee (x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1)\right)$

$\varphi_{\mathrm{D}} : \forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 < x_2 \to \exists x_3 (x_1 < x_3 \wedge x_3 < x_2)\right)$

で定める．$\Gamma_{\mathrm{O}} = \{\varphi_{\mathrm{N}}, \varphi_{\mathrm{T}}\}$, $\Gamma_{\mathrm{LO}} = \Gamma_{\mathrm{O}} \cup \{\varphi_{\mathrm{L}}\}$, $\Gamma_{\mathrm{DLO}} = \Gamma_{\mathrm{LO}} \cup \{\varphi_{\mathrm{D}}\}$, $\Gamma_{\mathrm{Tnm}} = \{\varphi_{\mathrm{N}}, \varphi_{\mathrm{L}}\}$ と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ストラクチャー $\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}$ のそれぞれについて，Γ_{O}, Γ_{LO}, Γ_{DLO} のどのモデルであってどのモデルでないか，答えよ．また，$\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}$ のどの2つも同型でないことを説明せよ．

(2) Γ_{Tnm} のモデルだが Γ_{O} のモデルでない，$\mathcal{L}_<$ に対応するストラクチャーの例を挙げよ．

[10] 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と，そこで定義される実数値確率変数 X と X_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $X_n \to X$ a.s. $(n \to \infty)$ であるとき，すべての $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

は成立するか．成立するならそれを示し，不成立なら反例を挙げそれを示せ．

(2) すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ であるとき，

$$X_n \to X \quad \text{a.s.} \quad (n \to \infty)$$

は成立するか．成立するならそれを示し，不成立なら反例を挙げそれを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} E[|X - X_n|^p] = 0$, $p > 0$ であるとき，すべての $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

は成立するか．成立するならそれを示し，不成立なら反例を挙げそれを示せ．

問題は次ページに続く．

［11］添付の「プログラム」は，ある数理モデルのプログラムである．この数理モデルについて，次の問いに答えよ．

(1) この数理モデルは，どのようなモデルであるか説明せよ．

(2) このプログラムは，改良の余地がある．どのようにプログラムを変更するべきか説明せよ．説明ではプログラムを実際に書いてもよいし，アルゴリズムを記述するのでもよい．

［12］以下の問いに答えよ．

(1) n 個の異なるタイプの生物種の適者生存を考える．各タイプを $i = 1, 2, \cdots, n$ と呼ぶ．時刻 $t > 0$ におけるタイプ i の頻度を $x_i(t)$ とする．タイプ i の適応度を f_i とする．ただし f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は正の定数とする．この淘汰のダイナミクスを表す方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた方程式を解け．

(3) 突然変異行列 $[q_{ij}]$ を用いて，(1) のモデルに突然変異を組み込んだダイナミクスを考える．このダイナミクスを表す方程式を求めよ．

(4) (3) で求めた方程式を解け．

C:\Users\minorutabata\Desktop\プログラム.c


```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define D N/250
#define N 1000
#define DELTAT 0.01
#define A 2.0
#define B 1.0

#define R0 0.0
#define S0 1.0-I0
#define I0 0.1

#define FNAME "XXX.txt"

double function1(double s, double i, double r);

double function2(double s, double i, double r);

double function3(double s, double i, double r);

int main(void)
{
    int n;

    double s[N];

    double i[N];

    double r[N];


    FILE *fp;

    fopen_s(&fp, FNAME, "w");

    s[0] = S0;

    i[0] = I0;

    r[0] = R0;

    for(n=0;n<=N-2;n++)
    {
        s[n+1] = s[n] + function1(s[n],i[n],r[n])*DELTAT;

        i[n+1] = i[n] + function2(s[n],i[n],r[n])*DELTAT;

        r[n+1] = r[n] + function3(s[n],i[n],r[n])*DELTAT;

    }

    for(n=0;n<=N-1;n=n+D)
    {
        fprintf(fp,"%f,",s[n]);
    }

    fprintf(fp,"\n");

    for(n=0;n<=N-1;n=n+D)
    {
        fprintf(fp,"%f,",i[n]);
    }

    fprintf(fp,"\n");

    for(n=0;n<=N-1;n=n+D)
    {
        fprintf(fp,"%f,",r[n]);
    }

    fprintf(fp,"\n");
```

```c
    fclose(fp);  /*file close*/

    return (0);

}

double function1(double s, double i, double r)
{
    double x;

    x = -A*s*i;

    return (x);
}

double function2(double s, double i, double r)
{
    double x;

    x = A*s*i-B*i;

    return (x);
}

double function3(double s, double i, double r)
{
    double x;

    x = B*i;

    return (x);
}
```