（電子・数物系専攻 博士前期課程） (2015.8)

平成２８年度

大阪府立大学大学院
工学研究科電子・数物系専攻
博士前期課程入学試験

試験科目

数理工学専門・物理系
試験問題

（解答時間 180 分）

注意

（１）受験番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。
（２）４科目（電磁気学、量子力学、半導体・統計物理学、力学）の中から３科目を選択し、解答せよ。
（３）選択した科目名を解答用紙の所定欄に記入せよ。
（４）解答欄が不足する場合は、新たに解答用紙を配付するので、挙手すること。
（５）試験終了後、問題冊子は持ち帰ってよい。

電磁気学

問題１

真空中（真電荷、伝導電流がゼロ）におけるマクスウェルの方程式を下記に示す。$\boldsymbol{E}$は電界、$\boldsymbol{H}$は磁界、ε_0は真空の誘電率、μ_0は真空の透磁率である。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0,\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0\ ,\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\ ,\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

(1) 平面電磁波の電界を$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp\{j(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\}$（$\boldsymbol{E}_0$は定ベクトル（各成分が定数）、$\boldsymbol{k}$は波数ベクトル、$\boldsymbol{r}$は位置ベクトル、$j=\sqrt{-1}$）と表す。このとき、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0$ を用いて$\boldsymbol{E}$が横波であることを示せ。

(2) 真空中における$\boldsymbol{E}$に関する波動方程式を求めよ。

（参考：ベクトル公式 $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}$）

問題２

(1) 図１(a)のように面積Sの平行な導体電極（間隔d）の間に誘電率ε、厚さtの誘電体板が挿入されている。両極板に$\pm Q$の電荷を与えたとき、電極間の空気中の電界、誘電体中の電界、極板間の電位差を求め、全体の静電容量を求めよ。

(2) 図１(b)のように、電極の半分の面積だけ誘電率ε、厚さtの誘電体板を挿入したときの全体の静電容量を求めよ。

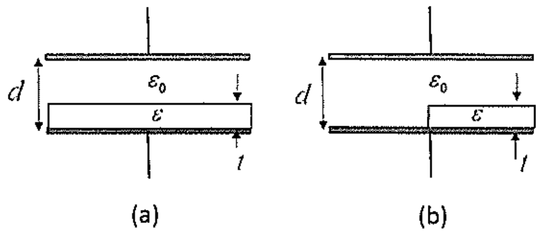


図１

ただし、電界はすべて極板に垂直とし、極板や誘電体板の端の効果は無視する。

問題３

図２のように、磁束密度Bの一様な磁界中で、長方形のコイルを磁界に垂直な軸を中心に角速度ωで回転させる。ただし、長方形のコイルの巻き数をNとし、２辺の長さをa、bとする。

(1) コイルに発生する誘起起電力を求めよ。

(2) 長方形のコイルの２辺の和$a+b=c$（一定）の条件の下で、誘起起電力が最大になるときのa、bの関係を求めよ。

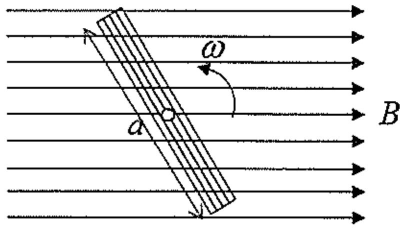


図２

問題４

直流電流計（最大目盛り 1mA、内部抵抗 45Ω）に関する以下の問いに答えよ。

(1) この電流計に抵抗を接続し、最大目盛りが 1V の電圧計を作るものとする。どのような値の抵抗をどのように接続すればよいか。

(2) この電流計に抵抗を接続し、最大目盛りが 10mA の電流計を作るものとする。どのような値の抵抗をどのように接続すればよいか。

(3) 起電力が 0.5V、内部抵抗 10Ωの電池の電圧を (1)で作った電圧計（最大目盛り 1V）を用いて測定すると何Vを表示するか。

量子力学

1. ある演算子 $\mathcal{C}$ の任意の固有関数 Ψ_i と Ψ_j について、

$$\int \Psi_i^*(\mathcal{C}\Psi_j)\,\mathrm{d}V = \int \Psi_j(\mathcal{C}\Psi_i)^*\,\mathrm{d}V$$

が成立するとき演算子 $\mathcal{C}$ をエルミート演算子と呼ぶ。このとき次の設問に答えよ。

(a) 運動エネルギー演算子 $\mathcal{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ はエルミート演算子となることを証明せよ。

(b) 固有値方程式 $\mathcal{D}\Psi_i = d_i\Psi_i$ でエルミート演算子 $\mathcal{D}$ の固有値 d_i は必ず実数になることを証明せよ。

(c) エルミート演算子 $\mathcal{F}$ の異なる固有値 f_k と f_ℓ $(f_k \neq f_\ell)$ に属する固有関数 Ψ_k と Ψ_ℓ は互いに直交することを証明せよ。

2. 水素原子のハミルトニアン（cgs 単位系による表示）は

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}$$

で与えられ、水素原子（$Z=1$）の 2s 電子波動関数は、

$$\Psi_{2s}(r) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\frac{2}{(2a_0)^{3/2}}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$$

で表されるものとする。波動関数 $\Psi_{2s}(r)$ は規格化条件を満たすことを計算により確かめよ。Schrödinger 方程式 $\mathcal{H}\Psi_{2s} = E_{2s}\Psi_{2s}$ からエネルギー準位 E_{2s} の式を求めよ。エネルギー固有値 E_{2s} を有効数字 2 桁で数値計算せよ。ここで、$a_0 = \hbar^2/me^2$ は Bohr 半径であり、球座標 (r,θ,φ) に対する公式

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

を用いて良い。また、数値計算では、c を光速としたときに、電子の質量に関しては $mc^2 = 5\times10^5$ eV 、Planck 定数に関しては $\hbar c = 200$ eV·nm、電子の電荷に関しては $e^2 = 1.5$ eV·nm とおいて良い。

3. 一辺が L の立方体 $(0\le x\le L,\ 0\le y\le L,\ 0\le z\le L)$ の中に閉じこめられた質量 m の自由電子を考えよう。この系の Schrödinger 方程式をたて、規格化された電子の波動関数 $\Psi(x,y,z)$ とエネルギー固有値 E を求めよ。その際、$\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ と変数分離するとよい。この系の単位体積あたり、単位エネルギーあたりの状態密度 $D(E)$ を求めよ。ただし、電子のスピンの自由度は無視するものとする。

半導体・統計物理学

問題1 SiやGeなどの半導体に関して下記の問いに答えよ。

(1) SiやGeなどのIV族半導体におけるアクセプター準位、ドナー準位の形成法を述べ、アクセプター準位、ドナー準位のエネルギーバンド図を示せ。

(2) Siのドナー準位を数値計算せよ。必要なら水素原子のエネルギー準位の式

$$E = -\frac{m_0 q^4}{8\varepsilon_0{}^2 n^2 h^2} = -\frac{13.6}{n^2} \quad \text{(eV)}$$

を用い、用いた理由を述べよ。ここで、m_0は電子の質量、qは電気素量、ε_0は真空の誘電率、hはプランク定数、nは主量子数である。Siの電子有効質量は$0.33m_0$、比誘電率は11.9とせよ。

問題2 半導体中の正孔の拡散係数をD_p、移動度をμ_pとしてアインシュタインの関係式を導出せよ。

問題3 結晶中のあるフォノンモードの全エネルギーは

$$U = \int D(\omega)\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1}d\omega \tag{1}$$

で表される．ここで，$D(\omega)$はフォノン状態密度、k_BTは熱エネルギー、$\hbar\omega$はフォノンエネルギーである。なお、$\hbar = h/2\pi$である。次の問いに答えよ。

(1) 光学フォノンによる比熱を記述するアインシュタインモデルにおいて仮定されているフォノン状態密度を示せ。光学フォノンの周波数をω_0、振動子数をNとせよ。

(2) アインシュタインモデルによる比熱の式を導出せよ。

(3) アインシュタインモデルによる比熱の式の高温極限($\hbar\omega << k_BT$)における表式を示せ。

問題4 伝導帯端付近、価電子帯端付近の状態密度は次式で与えられる。

$$N_c(E) = \frac{4\pi}{h^3}(2m_n^*)^{3/2}(E - E_c)^{1/2}$$

$$N_v(E) = \frac{4\pi}{h^3}(2m_p^*)^{3/2}(E_v - E)^{1/2}$$

ここで、$m_n{}^*$は電子の有効質量、$m_p{}^*$は正孔の有効質量、E_cは伝導帯端のエネルギー、E_vは価電子帯端のエネルギーである。

（裏面につづく）

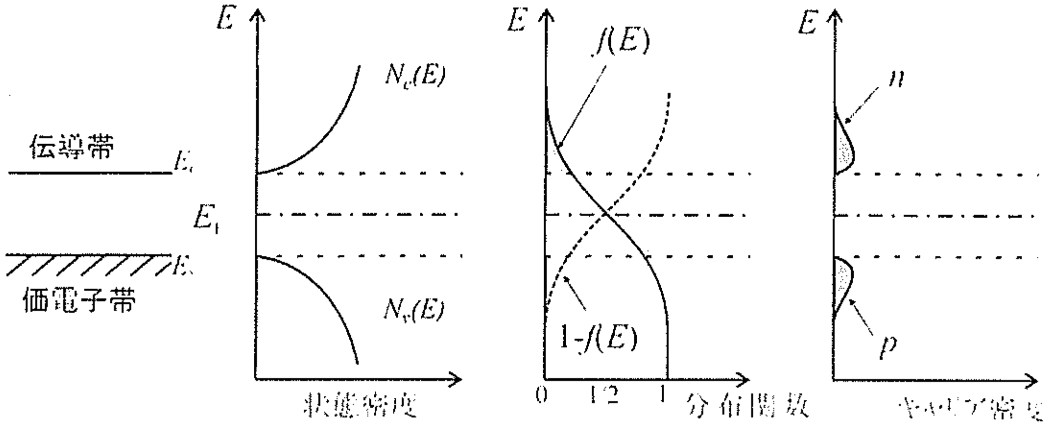


図１　左からバンド図、状態密度、分布関数、キャリア密度を示す。

(1) $E-E_F >> k_BT$ のときフェルミ・ディラック $f(E)$ の分布関数がマクスウェル・ボルツマンの分布関数と同じ形になることを示せ。

(2) 伝導帯中の分布関数が上のマクスウェル・ボルツマンの分布関数となるとして（図１のごとくフェルミ準位が禁制帯中央付近にあるとして)、電子密度 n が、$n = N_c \exp(-\frac{E_c - E_F}{k_BT})$ となることを示せ。必要なら公式 $\int_0^\infty x^{1/2}e^{-x}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いよ。ここで、伝導帯の有効状態密度は $N_c = 2\left(\frac{2\pi m_n^* k_BT}{h^2}\right)^{3/2}$ である。

(3) 価電子帯の有効状態密度、$N_v = 2\left(\frac{2\pi m_p^* k_BT}{h^2}\right)^{3/2}$ 、として、価電子帯の正孔密度 p も同様に求めることができる。pn 積がフェルミ準位とは無関係であることを示せ。

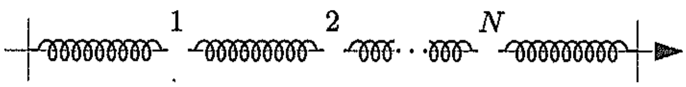
(4) 真性半導体のフェルミ準位が禁制帯中央付近にあることを示せ。

（以上）

力学

以下の［1］～［4］のうちから2題選択して答えよ。

［1］図のように、質量 m の N 個の質点が、水平な x 軸に沿って質量の無視できるばねでつながれており、両端は固定されている。質点は x 軸に沿ってなめらかに動けるものとし、n 番目の質点の釣り合いの位置からのずれを x_n とする。ばねはフックの法則に従い、ばね定数は k であるとする。また、釣り合いの位置からのずれは十分小さく質点間の距離が 0 となることはないとする。



(a) n 番目の質点に働く力を求めよ。

(b) $N=2$ の場合に、$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2),\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)$ とおいて、運動方程式を u_1, u_2 を用いて表せ。

(c) (b) の運動方程式を解くことにより、時刻 t での x_1, x_2 を求めよ。ただし、$t=0$ で $u_1=a,\ u_2=b,\ \dot{u}_1=\dot{u}_2=0$ であるとせよ。

(d) 第 (j,l) 成分が $U_{j,l}=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\left(\frac{\pi jl}{N+1}\right)$ である大きさ N の正方行列 U は $U^2=I$ を満たす。ただし、π は円周率で、I は単位行列である。$N=3$ の場合に $U^2=I$ であることを示せ。

(e) $u_j = \sum_{n=1}^{N} U_{j,n}x_n\ (j=1,2,\ldots,N)$ とおいて、運動方程式を $u_1,u_2,\ldots,u_N$ を用いて表せ。ただし、$U_{j,0}=U_{j,N+1}=0$ として、$U_{j,n-1}+U_{j,n+1}=2\cos\left(\frac{\pi j}{N+1}\right)U_{j,n}$ $(1 \le j,n \le N)$ であることに注意せよ。

(f) (e) を解くことにより、時刻 t での $x_1,x_2,\ldots,x_N$ を求めよ。ただし、$t=0$ で $u_l=a$, $u_j=0\ (j\neq l),\ \dot{u}_1=\dot{u}_2=\cdots=\dot{u}_N=0$ であるとせよ。

［2］中心力場中での質量 m の質点の運動について考える。位置エネルギー $V(r)$ は原点からの距離 r の滑らかな単調増大関数であるとする。質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし、$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\neq 0$ である場合を考える。

(a) $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ は、時刻によらない定数であることを示せ。

(b) $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ の向きに z 軸をとり、xy 平面上で極座標 (r,θ) を用いる。$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ の z 成分を $r,\dot{\theta}$ を用いて表せ。

(c) (b) で求めた量を h とする。質点の運動エネルギーを $h,m,r,\dot{r}$ を用いて表せ。

(d) 質点の全エネルギーの値が E のとき、r は t について周期的に振動した。$V(r)=-\frac{k}{r}$ (k は正の定数) の場合に、r の最小値 r_1 および最大値 r_2 を求めよ。

(e) r が r_1 から出発して初めて r_2 に到達するまでの間における θ の変化量を $\Delta\theta$ とする。$V(r)=-\frac{k}{r}$ (k は正の定数) の場合には、$\Delta\theta=\pi$ であることが示される。この結果からわかる質点の xy 面上の軌跡の特徴を述べよ。また、V の r 依存性が異なる場合には、$\Delta\theta$ の値は π からずれる。この場合の質点の xy 面上の軌跡について論ぜよ。

［3］次に示すレスラー方程式について以下の問いに答えよ。

$$\dot{x} = -(y+z), \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = a + z(x-\mu).$$

ここで $a(>1)$ は定数であり、μ はパラメーターである $(0<\mu<\infty)$。

(a) 固定点は $\mu<\mu_c$ では存在せず、$\mu=\mu_c$ で１個、そして $\mu>\mu_c$ で２個存在する。μ_c を求めよ。

(b) $\mu>\mu_c$ において２個の固定点の座標 (x_i, y_i, z_i) $(i=1,2)$ を求めよ。ただし、x 座標が大きい方の固定点を $i=1$ とする。

(c) $\mu=\mu_c$ のときの固定点でのヤコービ行列の固有値を求めよ。

(d) μ が μ_c より大きくかつ μ_c に十分に近いところでの２個の固定点の安定性を調べよ。

(e) $\mu=\mu_c$ のときに起きる分岐現象の名称を答えよ。また、横軸を μ とし、縦軸を x 座標に取り、$\mu=\mu_c$ の近傍における分岐図を描け。安定な固定点は実線で、不安定な固定点は破線で描くこと。

［4］以下の問いに答えよ。

(a) １次元写像系 $x_{n+1}=F(x_n)$ $(n=0,1,\ldots)$ の固定点 x^* の安定性について、数式を使い詳しく説明せよ。

(b) １次元写像系における周期倍分岐の集積について説明し、そこに見られる定量的普遍性について説明せよ。

(c) カオスの初期条件敏感性について説明し、その強さを示す量を挙げよ。そして、１次元写像系の場合に、その量の定義の式を示せ（上の (a) の式を使うこと）。

(d) フラクタル図形を特徴付ける性質について説明し、フラクタル図形の例を一つ挙げよ。