2024年度　複素解析シラバス（月曜１限：航空・機械）

授業概要　複素解析の初歩（複素変数の関数の微積分）について解説する．複素微分，複素積分，級数展開などを実数値関数の微積分を復習しながら理解させ，複素関数における基本的な性質がコーシーの積分公式から得られることを講義する．さらに，実積分の計算への留数の応用を述べる．具体的に以下の能力を身につけることを目標とする：

- 複素数の計算ができ，その複素平面における図形的意味を理解できる．
- コーシーの積分定理，コーシーの積分公式を理解し，活用できる．
- テイラー展開，ローラン展開ができる．
- 留数が計算でき，留数定理が利用できる．
- 複素積分を実積分の計算に応用できる．

実積分の復習

例 1.　$e^x \cos x$ の不定積分を求めよ．

(解答 1)　部分積分法を用いると

$$\int e^x \cos x dx = \int (e^x)' \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx$$

$$= e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\therefore \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) \tag{1}$$

(解答 2)　オイラーの公式 $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ を用いると, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ より

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

と表せる．このとき

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (a \neq 0)$$

より

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + \frac{e^{(1-i)x}}{1-i} \right\} = \frac{e^x}{2} \left\{ \frac{1-i}{2} e^{ix} + \frac{1+i}{2} e^{-ix} \right\}$$

$$= \frac{e^x}{2} \left\{ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right\} = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$$

となり, (1) に一致する．　□

担当教員名：松永秀章　研究室：A14 棟 4 階 402 室
オフィスアワー：月 16:30〜17:30　連絡先：hideaki.matsunaga@omu.ac.jp
教科書：「複素解析入門 第 2 版」原・松永著　共立出版

複素積分の応用

例 2. $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta} d\theta$ を求めよ.

(解答 1) $\tan\dfrac{\theta}{2} = x$ と変数変換して, 定積分 I を求めると, $I = \dfrac{\pi}{2}$ が得られる.

(解答 2) 定積分 I を単位円周上の**複素積分**に置き換えて考える. $z = e^{i\theta}$ とおくと, $\theta : -\pi \to \pi \iff \{z : |z| = 1\} = C$ かつ $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta,\ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ より

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \frac{1}{5+3(z^2+1)/(2z)} \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_C \frac{2}{3z^2+10z+3} \cdot \frac{1}{i} dz \\
&= \int_C \frac{2}{i(z+3)(3z+1)} dz = \frac{2}{3i} \int_C \frac{1}{(z+3)(z+1/3)} dz
\end{aligned}
$$

ここで, 被積分関数の分母を 0 にする点は $z = -3$ および $z = -1/3$ であるが, 単位円 C の内部にあるものは $z = -1/3$ だけである. したがって, $f(z) = 1/(z+3)$ とおくと, **コーシーの積分公式**により

$$
I = \frac{2}{3i} \int_C \frac{f(z)}{z+1/3} dz = \frac{2}{3i} \times 2\pi i \times f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2} \qquad \square
$$

——————— * ——————— * ——————— * ———————

定理 1. $f(z)$ は単純閉曲線 C の周および内部で正則とし, a を C の内部の任意の点とする. このとき, 次式が成り立つ :

- $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ **(定理 3.4, コーシーの積分定理)**
- $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$ **(定理 3.7, コーシーの積分公式)**
- $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^m} dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a)$ **(定理 3.8, コーシーの積分公式)**

定理 2. $f(z)$ は単純閉曲線 C の内部の <u>孤立特異点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$</u> を除いて C の周および内部で正則であるとする. このとき, 次式が成り立つ :

$$
\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[f, a_k] \qquad \textbf{(定理 5.4, 留数定理)}
$$

ただし

$$
\mathrm{Res}\,[f, a_k] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{z\to a_k} (z-a_k)f(z) & (a_k \text{ が } 1 \text{ 位の極のとき}) \\ \displaystyle\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a_k)^m f(z)] & (a_k \text{ が } m \text{ 位の極のとき}) \end{cases}
$$