2024年度　常微分方程式シラバス（火曜４限：電物）

授業概要　常微分方程式は1変数の未知関数とその導関数を含む方程式で，力学や電気回路のみならず，自然科学や工学の様々な分野で登場する．この授業では常微分方程式の変数分離法，定数変化法，記号解法，行列解法，級数解法について解説する．具体的に以下の能力を身につけることを目標とする：

- 変数分離法または定数変化法を用いて，1階常微分方程式が解ける．
- 記号解法を理解し，定数係数の非同次線形常微分方程式の一般解を求められる．
- 行列解法を理解し，定数係数の連立線形常微分方程式の一般解を求められる．
- 級数解法を理解し，変数係数の線形常微分方程式の級数解を求められる．
- 変数変換を用いて，ある常微分方程式を既知の常微分方程式に変換できる．

1階微分方程式

$$x' = f(t)g(x) \tag{1}$$

を考える．$g(x) \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{g(x)}\dfrac{dx}{dt} = f(t)$ の両辺を t で積分すると

$$\int \frac{1}{g(x)}dx = \int \frac{1}{g(x)}\frac{dx}{dt}dt = \int f(t)dt + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

を得る．これを**変数分離法**という．

1階線形微分方程式

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{2}$$

の解で初期条件 $x(t_0) = x_0$ を満たす解 $x(t)$ は

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right\} + \int_{t_0}^{t} \exp\left\{\int_{r}^{t} a(s)ds\right\} b(r)dr$$

で与えられる．これを**定数変化法の公式**という．

2階線形微分方程式

$$x'' + a_1x' + a_2x = b(t) \tag{3}$$

$$x'' + a_1x' + a_2x = 0 \tag{4}$$

を考える．ここで, a_1, a_2 は定数で $b(t)$ は連続関数とする．

定理 1. $x_1(t)$, $x_2(t)$ を (4) の**1次独立**な解とすると, (4) の一般解 $x_h(t)$ は

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \quad (c_1,\ c_2\text{ は任意定数})$$

定理 2. (3) の一般解 $x(t)$ は, (4) の一般解 $x_h(t)$ と (3) の特殊解 $x_p(t)$ の和, すなわち

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

担当教員名：松永秀章　研究室：A14棟4階402室

オフィスアワー：月 16:30〜17:30　連絡先：hideaki.matsunaga@omu.ac.jp

教科書：「常微分方程式入門 第3版」原・松永著　共立出版

問題 1. (4) の一般解 $x_h(t)$ の求め方は？ …… **公式 1**（p.36 例題 2.4）
(3) の特殊解 $x_p(t)$ の求め方は？ …… **公式 2**（p.30 公式 2.2）

公式 1. (4) の一般解 $x_h(t)$ は, **特性方程式** $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ の 2 解を λ_1, λ_2 とすると

- λ_1, λ_2 が異なる実数解のとき　$x_h(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$
- $\lambda_1=\lambda_2$ (重解) のとき　$x_h(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2te^{\lambda_1 t}$
- λ_1, λ_2 が $\alpha\pm i\beta$ $(\beta\neq 0)$ のとき　$x_h(t)=c_1e^{\alpha t}\cos\beta t+c_2e^{\alpha t}\sin\beta t$

(3) の特殊解 $x_p(t)$ は

$$x_p(t)=\frac{1}{P(D)}b(t),\quad \text{ただし}\ P(D)=D^2+a_1D+a_2,\ D=\frac{d}{dt}$$

公式 2. $P(\lambda)$ を多項式, D を**微分演算子**, α を定数, $\varphi(t)$ を任意の関数とするとき

- $P(\alpha)\neq 0$ ならば, $\dfrac{1}{P(D)}e^{\alpha t}=\dfrac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha t}$
- $\dfrac{1}{P(D)}\{e^{\alpha t}\varphi(t)\}=e^{\alpha t}\dfrac{1}{P(D+\alpha)}\varphi(t)$

注意. $\varphi(t)$ が多項式のとき, $\dfrac{1}{P(D)}\varphi(t)$ は**山辺の方法**により簡単に求められる.

1 階連立線形微分方程式

$$\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x} \tag{5}$$

を考える. ここで A は 2×2 定数行列とする. $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$（$P$：正則行列）とおくと, (5) は

$$\boldsymbol{y}'=P^{-1}AP\boldsymbol{y} \tag{6}$$

に変換される. $\boldsymbol{y}(t)$ を (6) の一般解とすると, (5) の一般解は $\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)$ と求められる.

問題 2. (6) の一般解 $\boldsymbol{y}(t)$ の求め方は？ …… **公式 3**（p.64 定理 3.6）
正則行列 P の求め方は？ …… A の**固有値**, **固有ベクトル**（p.63 定理 3.5）

公式 3. $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$ は実数で $\beta\neq 0$ とする. (6) の一般解 $\boldsymbol{y}(t)$ は

- $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ ならば, $\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$
- $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ ならば, $\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t}\\ 0 & e^{\lambda_1 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$
- $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ ならば, $\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t\\ -e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$